UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMATICAS
UNAM-UMSNH

Consecuencias de PFA y forcing con modelos como condiciones laterales

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

PRESENTA:
Osvaldo Guzmán González

Director: Michael Hrusak

MÉXICO, D. F. 27 de Mayo 2013

Introducción

La Hipótesis del Continuo (CH) es la afirmación de que todo subconjunto no numerable de los reales tiene el mismo tamaño que el continuo. Fue Cantor quién formuló esta hipótesis, y dedicó gran esfuerzo a tratar de probarla. Actualmente sabemos que esto es imposible, gracias a los trabajos de Gödel y Cohen, sabemos que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Más aún, sabemos cómo forzar CH o $\neg\mathsf{CH}$ sobre cualquier modelo base.

Cuando se asume la Hipótesis del Continuo, es posible crear una gran cantidad de objetos patológicos, los modelos de CH tienen muy poca estructura y no hay muchos teoremas de clasificación sobre estructuras interesantes. Ejemplos de este fenómeno son la existencia de $2^{\mathfrak{c}}$ subconjuntos ω_1-densos de reales no isomorfos, , los ordenes lineales no numerables no tienen base finita, la existencia de $2^{\mathfrak{c}}$ conjuntos dirijidos de tamaño ω_1 que no son Tukey equivalentes o que las lineas de Aronszajn no están bien quasi ordenadas. Usando $\diamondsuit$ el cual es un fortalecimiento de CH, es posible contruir aún más conjuntos exóticos, como son los árboles de Suslin o las grietas destructibles.

En el espectro opuesto, tenemos los llamados "axiomas de forcing" los cuales son axiomas que le dan gran estructura al universo. ¿Que significa un axioma de forcing? Menachem Magidor dio una descripción informal de estos axiomas,

"A forcing axiom is the assertion that if a mathematical object can be imagined in a reasonable way...then it exists!"

Mientras más generosos seamos con nuestra interpretación de "imagined in a reasonable way" obtendremos axiomas de forcing más poderosos. El primer axioma de forcing en hacer su aparición fue el *Axioma de Martin* (MA) . Uno de los axioma de forcings más importantes y estudiados es el conocido *Proper Forcing Axiom* (PFA) el cual establece que si $\mathbb{P}$ es un forcing propio y $\{D_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ es una colección de abiertos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe $G \subseteq \mathbb{P}$ que intersecta a cada D_α[1]. PFA le da estructura muy ordenada al universo, por ejemplo, (contrastando con CH), cualesquiera 2 subconjuntos ω_1-densos de reales son isomorfos, existe una base de 5 elementos para los ordenes lineales no numerables, existen exactamente 5 conjuntos dirijidos de tamaño ω_1 que no son Tukey equivalentes, y las lineas de Aronszajn están bien quasi ordenadas. Sorprendentemente, también es capáz de decidir el tamaño del continuo; es un resultado de Todorcevic y Velickovic que el Proper Forcing Axiom implica que el cardinal del continuo es el segundo cardinal no numerable.

El Proper Forcing Axiom es en verdad un axioma sorprendente, muy poderoso y con consecuencias inimaginables. Sin embargo, a veces no es muy fácil

[1] Ver [5] para las nociones no definidas

de usar. En las clásicas aplicaciones del Axioma de Martin el "forcing natural", para un determinado problema resulta ser c.c.c. y así puede aplicarse MA sin problemas. Sin embargo, con PFA rara vez sucede así, muy frecuentemente el "forcing natural" colapsa a ω_1 por lo que no podemos forzar con él, de manera que hay que buscar una modificación de este forcing que sea propio. Esto puede ser una tarea bastante no trivial, a veces para encontrar el "forcing correcto", es necesario hacer una extensión preeliminar (por ejemplo, forzar CH). Stevo Todorcevic desarolló una técnica precisamente para lidiar con estos problemas ([8]). Su método consiste en usar submodelos elementales como condiciones laterales, los cuales son capaces de (en algunos casos) "arreglar" a un forcing que colapse a ω_1 y así obtener un forcing propio. Con esta técnica se pueden dar pruebas conceptualmente más fáciles de teoremas ya conocidos, pero también se han probado muchos teoremas nuevos con ella, que probablemente no se hubieran logrado probar con algún otro método. En esta tesina veremos algunas consecuencias del Proper Forcing Axiom que se prueban usando la técnica de Todorcevic, esperando así que el lector aprenda algunas consecuencias maravillosas de PFA y se familiarize con la técnica de forcing usando modelos como condiciones laterales.

El primer capítulo trata sobre forcings c.c.c. y su único propósito es el brindar motivación para partes subsecuentes de la tesina. El segundo capítulo es sobre el "colapso de Todorcevic" el cual es el ejemplo más sencillo de forcing usando modelos como condiciones laterales. El tercer capítulo trata sobre el Open Coloring Axiom, el cual es una interesante dicotomía "estilo Ramsey" descubierta por Todorcevic y probamos que esta es cierta bajo PFA. El cuarto capítulo introduce la P-Ideal Dichotomy la cual es otra dicotomía parecida al teorema de Ramsey (también introducida por Todorcevic) y probaremos que también es consecuencia de PFA. En el quinto capítulo desarollaremos la prueba de Todorcevic de que bajo PFA no existen los espacios hereditariamente separables no Lindelöf. En el sexto capítulo veremos un interesante teorema de Alan Dow sobre la estructura de las familias MAD bajo el Proper Forcing Axiom a saber, que toda familia MAD contiene una familia de Luzin. En el último capítulo se expondrá la prueba de que bajo PFA solo existen cinco ordenes no Tukey equivalentes de tamaño ω_1, este también es un resultado de Todorcevic.

El teorema principal del sexto capítulo se debe a Alan Dow, todos los demás resultados son de Todorcevic.

1. Forcings c.c.c.

Supongamos que queremos forzar un conjunto A con ciertas propiedades. Típicamente, el mejor escenario de todos es lograr esto con un orden cumpla con la *condición de la cadena contable* (c.c.c.), debido a que como es bien conocido, los forcings c.c.c. preservan a todos los cardinales, es posible iterarlos con soporte finito y existe una gran cantidad de resultados de preservación cuando se itera con este tipo de soporte. Esto hace a la clase de los ordenes parciales c.c.c. una de las más importante y "con mejor estructura" de todas.

Es claro que un orden parcial $\mathbb{P}$ es c.c.c. si y solo si para todo $M \precsim H_\theta$ (con θ lo suficientemente grande) si $\mathbb{P} \in M$ entonces $1_\mathbb{P}$ es una condición $(M, \mathbb{P})$ genérica[2]. Dado $\mathbb{P}$ un orden parcial, tenemos el siguiente esquema para tratar de probar que es cumple la condición de la cadena contable,

1. Dado $M \precsim H_\theta$ con $\mathbb{P} \in M$ y $D \in M$ abierto denso, queremos probar que $D \cap M$ es predenso (debajo de $1_\mathbb{P}$).
2. Tomamos $p \in D$ y construimos $p_M \in M$ tal que $p \leq p_M$ (informalmente, podemos pensar que p_M es una "copia" de p en M, o que p_M es "lo más que conoce M de p").
3. Usando elementaridad y algunos otros trucos (frecuentemente no triviales) usar a p_M para encontrar $q \in D \cap M$ tal que q y p sean compatibles.

Notemos que en 2 basta tomar $p \in D$ pues D es denso. Veamos algunos ejemplos de como aplicar el esquema anterior.

Ejemplo 1 Agregar ω_2 reales de Cohen.

Prueba. Sea $\mathbb{C}_{\omega_2}$ el forcing para agregar ω_2 reales de Cohen, es decir, $\mathbb{C}_{\omega_2}$ es el conjunto de todas las funciones $p : A \longrightarrow 2$ donde $A \in [\omega_2]^{<\omega}$ y lo ordenamos con la contención invertida. Probemos que $\mathbb{C}_{\omega_2}$ es c.c.c., así tomemos $M \precsim H_\theta$, $D \in M$ abierto denso y $p \in D$. Llamemos $p_M = p \cap M \in M$, claramente existe $r \in D \cap M$ tal que $r \leq p_M$, ahora notemos que $dom\,(r) \subseteq M$ y $dom\,(p) \cap M = dom\,(p')$ de manera que $p \cup r$ es una extensión común de p y r. ■

El ejemplo previo es especial pues es demasiado sencillo, veamos otros un poco más interesantes. Dado $\mathcal{G} = \langle \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}, \{B_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \rangle$ una grieta[3] definimos la coloración $c : [\omega_1]^2 \longrightarrow 2$ dado por $c\,(\alpha, \beta) = 0$ si y solo si $(A_\alpha \cap B_\beta) \cup (A_\beta \cap B_\alpha) \neq \emptyset$.

---

[2] Decimos que p es $(M, \mathbb{P})$-*genérica* si para todo $D \in M$ si $D \subseteq \mathbb{P}$ es abierto denso entonces D es predenso bajo p.

[3] $\mathcal{G} = \langle \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}, \{B_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \rangle$ es una *grieta* si $A_\alpha \subseteq^* A_\beta$, $B_\alpha \subseteq^* B_\beta$ siempre $\alpha < \beta$, $A_\delta \cap B_\gamma =^* \emptyset$ para cualesquiera δ, γ y no existe C tal que $A_\xi \subseteq^* C$ y $B_\xi \cap C =^* \emptyset$ para todo ξ.

Ejemplo 2 El forcing que congela una grieta.

Prueba. Dado $\mathcal{G} = \langle \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}, \{B_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} \rangle$ una grieta, denotamos por $\mathcal{FR}(\mathcal{G})$ al *freezing forcing* de $\mathcal{G}$, el cual consta de todos los subconjuntos finitos 0-monocromáticos para c. Probaremos que el forcing es c.c.c. Sea $M \precsim H_\theta$, $D \in M$ abierto denso y $p \in M$, definamos $p_M = p \cap M \in M$ y supongamos que $p = p_M \cup \{\delta_1, ..., \delta_n\}$ (de manera que si $i < j$ entonces $\delta_i < \delta_j$). Encontremos $a_1, ..., a_n, b_1, ...b_n \in [\omega]^{<\omega}$ y $m \in \omega$ tal que:

1. $a_i \sqsubseteq A_{\delta_i}$, $b_i \sqsubseteq B_{\delta_i}$, $a_i, b_i \subseteq m$,
2. Si $i \neq j$ entonces $(a_i \cap b_j) \cup (a_j \cap b_i) \neq \emptyset$,
3. Si $i < j$ entonces $A_{\delta_i} - m \subseteq A_{\delta_j}$, $B_{\delta_i} - m \subseteq B_{\delta_j}$,
4. $A_{\delta_i} \cap B_{\delta_i} \subseteq m$.

Ahora definamos L como el conjunto de todos los $q \in D$ tal que $q = p_M \cup \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ y cumplen 1, 3 y 4 cambiando δ_i por ξ_i. Notemos que $L \in M$ y $p \in L$ de manera que L es no numerable. Dado $r > m$ definimos $L_r = \{p_M \cup \{\xi_1, ..., \xi_n\} \in L \mid r \in B_{\xi_1}\} \in M$. Primero afirmamos que hay $r > m$ tal que $r \in A_{\delta_1}$ y $L_r \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario, así definamos $X = \{r > m \mid L_r = \emptyset\}$, claramente $X \in M$ y $A_{\delta_1} \subseteq^* X$. Llegaremos a una contradicción probando que X llena la grieta y por elementaridad, basta probar que para todo $\gamma \in M$ se tiene que $A_\gamma \subseteq^* X$ y $B_\gamma \cap X =^* \emptyset$. Tomemos $\gamma \in M$ y notemos que existe entonces existe $p_M \cup \{\xi_1, ..., \xi_n\} \in L$ tal que $\beta = \xi_1 > \gamma$. Como $A_{\delta_1} \subseteq^* X$ entonces $A_\beta \subseteq^* X$ y por definición $B_\beta \cap X = \emptyset$. Como $A_\gamma \subseteq^* A_\beta$ y $B_\gamma \subseteq B_\beta$ se tiene el resultado. Escojamos $r \in A_{\delta_1}$ tal que $r > m$ y $L_r \neq \emptyset$, entonces por elementaridad podemos encontrar $q \in L_r \cap M$ obviamente $q \in D$ y es fácil ver que p y q son compatibles. ■

Ahora veremos un ejemplo referente a arboles de Aronszajn[4].

Ejemplo 3 El forcing para agregar una anticadena a un árbol de Aronszajn.

Prueba. Dado T un árbol de Aronszajn, definimos $a(T)$ como el conjunto de todas las anticadenas finitas de T y lo ordenamos con la contención invertida. Veamos que $a(T)$ es c.c.c., así tomemos $M \precsim H_\theta$ y $D \in M$ abierto denso con $p \in D$. Llamemos $\delta = M \cap \omega_1$ y notemos que $T \cap M = T_\delta$[5] pues T es Aronszajn. Definamos $p_M = p \cap M$, supongamos que $p = p_M \cup \{s_1, ..., s_n\}$ y escojamos $\alpha < \delta$ tal que $p_M \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi$. Escojamos $\overline{s}_i \in \bigcup_{\xi<\delta} T_\xi$ que tengan altura mayor que α, $\overline{s}_i \sqsubseteq s_i$ y $\overline{s}_i$ sea incompatible con $\overline{s}_j$ siempre que $\Delta(s_i, s_j) < \delta$.[6] Sea $L = \{q \in D \mid q = p_M \cup \{t_1, .., t_n\}$ y $\overline{s}_i \sqsubseteq t_i\}$ el cual es un elemento de M y

[4]Decimos que un árbol T es *Aronszajn* si es un árbol de altura ω_1, todos sus niveles son contables y no tiene ramas cofinales.

[5]Denotamos por T_ξ al nivel ξ de T.

[6]por $\Delta(s, t)$ entendemos el máximo segmento inicial de s y t.

como $p \in L$ entonces L es no numerable. Dado $\beta > \alpha$ y $i \leq n$ definimos $B_{\beta i}$ como el conjunto de los $t \in T_\beta$ tal que existen una cantidad no numerable de $q = p_M \cup \{r_1, ..., r_n\} \in L$ tal que $t \sqsubseteq r_i$. Por elementaridad, podemos concluir que para todo $\beta > \alpha$ y $i \leq n$ se tiene que $B_{\alpha i} \neq \emptyset$. Ahora afirmamos que hay β tal que para todo $i \leq n$ se tiene que $B_{\beta i}$ tiene al menos dos elementos. Supongamos que no, de esta manera, para todo $\beta > \alpha$ existe i_β tal que $\left|B_{\beta i_\beta}\right| = 1$. Escojamos $j \leq n$ tal que $E = \{\beta > \alpha \mid i_\beta = j\}$ sea no numerable. Notemos que si $\beta, \gamma \in E$ y $r_\beta \in B_{\beta j}$, $r_\gamma \in B_{\gamma j}$ entonces r_β y r_γ son compatibles, pero de esta manera podemos construir una rama cofinal de T, lo cual evidentemente es absurdo.

De esta forma, por elementaridad existe $\alpha < \beta < \delta$ tal que $|B_{\beta i}| \geq 2$ para todo $i \leq n$. Así podemos encontrar $q = p_M \cup \{t_1, .., t_n\} \in D \cap M$ tal que t_i es incompatible con s_i y así p y q son compatibles. ■

Frecuentemente las condiciones de un forcing se presentan con una parte central y con condiciones laterales. El fin de la parte central es aproximar al objeto que deseamos construir y las condiciones laterales imponen restricciones sobre la parte central. El ejemplo más sencillo es *forcing de Hechler*, el cual consta de parejas $(s, \mathcal{F})$ donde $s \in \omega^{<\omega}$, $\mathcal{F} \in [\omega^\omega]^{<\omega}$ y el orden está dado por $(s, \mathcal{F}) \leq (z, \mathcal{G})$ si y solo si $z \sqsubseteq s$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y si $n \in dom(s) - dom(z)$, $g \in \mathcal{G}$ entonces $g(n) < s(n)$. Aquí la parte central es la primera entrada (que aproxima al real de Hechler) y la segunda entrada es la condición lateral, que impone la restricción sobre la parte central de dominar a las funciones de la segunda entrada. Supongamos que queremos forzar algún objeto y el forcing natural $\mathbb{P}$ para lograrlo no es c.c.c. (incluso probablemente colapse a ω_1), el método de forcing usando modelos como condiciones laterales consiste en crear un nuevo orden $\mathbb{Q}$ cuyos elementos sean parejas $(p, \mathcal{M})$ donde $p \in \mathbb{P}$ (que será la parte central) y $\mathcal{M}$ será una $\in$-cadena de submodelos elementales (que serán las condiciones laterales) las cuales impondrán restricciones sobre p y sus futuras extensiones, esperando así corregir los problemas que tenía el forcing original. En los siguientes capítulos explicaremos esta técnica con más detalles y ejemplos.

2. Colapso de Todorcevic

El preservar a todos los cardinales es una propiedad bastante atractíva de los forcings c.c.c., sin embargo a veces es imperativo el colapsar para realizar ciertas construcciones (esta es una de la razones por la gran diferencia entre MA y PFA, pues este último puede usar el poder de colapsar cardinales a ω_1, también es la razón más básica por la que consistencia de PFA requiere de cardinales grandes y MA no). Una interesante forma de colapsar fue diseñada por Todorcevic, la cual llamaremos el Colapso de Todorcevic, que de alguna manera es el forcing "base" para el método de forcing usando modelos como condiciones laterales.

Definición 4 *Dado $\theta > \omega_1$ un cardinal lo suficientemente grande, definimos el* Colapso de Todorcevic $Col_{\in}(\theta)$ *como el conjunto de todas $\in$-cadenas finitas de submodelos elementales numerables de H_θ, ordenado por la contención invertida.*

Cuando escribamos $\mathcal{M} = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_{\in}(\theta)$, asumiremos que si $i < j$ entonces $M_i \in M_j$, en los capítulos subsecuentes se usará siempre esta notación implícitamente. Probaremos que $Col_{\in}(\theta)$ es propio, incluso satisface una versión más fuerte de esta noción,

Definición 5 *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial, $M \precsim H_\lambda$ numerable (con λ lo suficientemente grande) y $p \in \mathbb{P}$. Decimos que p es* fuertemente $(M, \mathbb{P})$-genérica *si para todo $G \subseteq \mathbb{P}$ genérico tal que $p \in G$ se tiene que $G \cap M$ es $(V, M \cap \mathbb{P})$-genérico. Decimos que $\mathbb{P}$ es* fuertemente propio *si para todo M y $q \in M$, q se puede extender a una condición fuertemente $(M, \mathbb{P})$-genérica.*

La diferencia entre propio y fuertemente propio es que en este último, necesitamos intersectar todos los densos de $\mathbb{P} \cap M$. Por elementaridad, si $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso y $D \in \mathbb{P}$ entonces $D \cap M$ es denso en $\mathbb{P} \cap M$, de aquí se sigue que todo fuertemente propio es propio. Evidentemente el forcing de Cohen es fuertemente propio y el siguiente resultado muestra que los forcings de random, Sacks, Laver, Hechler y Miller no son fuertemente propios,

Proposición 6 *Si $\mathbb{P}$ es fuertemente propio, $G \subseteq \mathbb{P}$ es genérico y $r \in V[G]$ es un real nuevo, entonces existe $c \in V[G]$ un real de Cohen sobre V tal que $r \in V[c]$.*

Prueba. Supongamos que p fuerza que $\dot{r}$ es un real nuevo. Sea M un submodelo elemental numerable tal que $\mathbb{P}, p, \dot{r} \in M$. Como $\mathbb{P}$ es fuertemente propio, podemos encontrar $q \leq p$ una condición fuertemente genérica y G un genérico tal que $q \in G$. Entonces $\dot{r}[G] \in V[G \cap M]$ el cual es una extensión de Cohen pues $\mathbb{P} \cap M$ es numerable. ■

Ahora veremos que el Colapso de Todorcevic es fuertemente propio,

Proposición 7 *$Col_{\in}(\theta)$ es fuertemente propio.*

Prueba. Sea $\lambda > \theta$ lo suficientemente grande y $M \precsim H_\lambda$ numerable con $p \in M \cap Col_{\in}(\theta)$. Definamos $M' = M \cap H_\theta$ el cual (dado que λ es grande) es un submodelo elemental de H_θ. Definamos $q = p \cup \{M'\}$ notemos que $q \in Col_{\in}(\theta)$ y M' es el $\in$-máximo elemento de q. Veremos que q es $(M, Col_{\in}(\theta))$ fuertemente genérico. Para ver esto, sea $D \subseteq Col_{\in}(\theta) \cap M$ abierto denso y $r \leq q$. Sea $r_M = r \cap M$ y notemos que $r = r_M \cup \{M'\} \cup r'$ (para algún r'). Claramente $r_M \in M \cap Col_{\in}(\theta)$ y así podemos encontrar $s \in D \cap M$ tal que $s \leq r_M$. Como $s \in M$ entonces $s \subseteq M$ por lo que $s \cup r$ es una extensión común de s y r. ■

Ahora estudiaremos la apariencia de los genéricos del Colapso de Todorcevic,

Proposición 8 *Si $G \subseteq Col_{\in}(\theta)$ es genérico, entonces $\bigcup G$ es una cadena creciente de submodelos elementales $\langle M_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \rangle$ tal que $H_\theta = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_1} M_\alpha$.*

Prueba. Es claro que $\bigcup G = \langle M_\alpha \mid \alpha \in \kappa \rangle$ es una cadena creciente de submodelos elementales y $H_\theta = \bigcup\limits_{\alpha \in \kappa} M_\alpha$, así solo tenemos que probar que $\kappa = \omega_1$. Claramente $\kappa \leq \omega_1$ pues cada M_α es numerable y notemos que (por genericidad) para cada $\alpha \in \omega_1$ existe $M \in G$ tal que $\alpha \leq M \cap \omega_1$ por lo que κ no puede ser numerable. ■

Y así podemos concluir lo siguiente,

Corolario 9 *Si $2^{<\theta} = \theta$ y $\theta^\omega = \theta$ (en particular si se cumple GCH y θ es regular) entonces $Col_{\in}(\theta)$ preserva ω_1, colapsa θ a ω_1 y preserva a los cardinales mayores que θ.*

De esta manera, lo que hace $Col_{\in}(\theta)$ es agregar una $\in$-cadena de longitud ω_1 de submodelos elementales numerables que cubren a H_θ. Ahora podemos explicar un poco más en que consiste el método de forcing con modelos como condiciones laterales. Supongamos que queremos forzar algún objeto $A \subseteq X$ y definimos $\mathbb{P}$ el orden parcial que consta de las aproximaciones finitas de A, pero lamentablemente no es c.c.c., incluso colapsa a ω_1. Entonces el método de forcing con modelos como condiciones laterales consiste en definir un nuevo orden parcial $\mathbb{Q}$ cuyos elementos (casi siempre) serán parejas $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ en donde,

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_{\in}(\theta)$ y $\mathbb{P}, X \in M_0$ (y posiblemente otros objetos de nuestro interés),
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow X$,
3. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$,
4. $f_p[\mathcal{M}_p] \in \mathbb{P}$,

5. Alguna otra condición referente a la interacción de los modelos y los $f_p(M_i)$ (esto siempre depende del problema en cuestión, frecuentemente se quiere que $f_p(M_i)$ evite a los "conjuntos malos" que están en M_i).

El orden de $\mathbb{Q}$ esta dado de la siguiente manera, $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \leq q = (\mathcal{M}_q, f_q)$ en caso que,

1. $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_p$,
2. $f_p \subseteq f_q$,
3. Alguna otra condición, dependiendo del problema en cuestión.

En caso de que todo salga bien, $\mathbb{Q}$ agregará una $\in$-cadena de submodelos elementales $\langle M_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \rangle$ y de manera que para cada $\alpha \in \omega_1$ tenemos un $a_\alpha \in X - M_\alpha$. Si tenemos suerte, $\{a_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ cumplirá las propiedades que queríamos de A desde un principio. Deseamos que $\mathbb{Q}$ sea propio y típicamente el siguiente esquema para probarlo funciona (comparar con el esquema propuesto en el capítulo anterior),

1. Tomamos $M \precsim H_\kappa$ numerable con $\kappa > \theta$ lo suficientemente grande y $\mathbb{Q}$, $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in M$,
2. Encontramos un $a \in X - M$ adecuado y definimos $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M \cap H_\kappa\}, f_q)$ donde $f_q(M \cap H_\kappa) = a$,
3. Deseamos probar que q es $(M, \mathbb{Q})$ genérica, para eso tomamos $D \in M$ abierto denso y $r \leq q$ con $r \in D$,
4. Definimos $r_M = (\mathcal{M}_r \cap M, f_r \cap M)$ el cual si tenemos suerte, será un elemento de $\mathbb{Q} \cap M$,
5. Usando a r_M, aplicando elementaridad y algunos otros trucos (frecuentemente no triviales), encontramos $s \in D \cap M$ tal que s y r son compatibles. En este paso, el hecho de que $M \cap H_\kappa \in \mathcal{M}_r$ suele ser vital.

Evidentemente, este método no puede entenderse sin ejemplos y el resto de la tesina esta dedicado a ver algunos de ellos.

3. Open Coloring Axiom

El teorema de Ramsey es sin duda una de las herramientas más importantes en combinatoria infinita. Sin embargo, es bien conocido que este falla para ω_1 y para $\mathfrak{c}$[7]. De hecho, es fácil construir coloraciones en $\mathfrak{c}$ sin monocromáticos no numerables; tomemos $(\mathbb{R}, \precsim)$ un buen orden de los reales y definamos la coloración $c : [\mathbb{R}]^2 \longrightarrow 2$ de manera que $c(a,b) = 0$ si y solo si $\precsim \restriction \{a,b\} = \leq \restriction \{a,b\}$ y $c(a,b) = 1$ en otro caso (donde $\leq$ es el orden usual de los reales). Es fácil ver que todo monocromático tienen que ser numerable. Sin embargo, podemos notar que la coloración anterior no es definible en ningún sentido ni tiene propiedades combinatorias o topológicas agradables. Podríamos preguntarnos si toda coloración con "buenas" propiedades combinatorias tiene monocromáticos no numerables. Algunas coloraciones con propiedades combinatorias agradables son las siguientes,

Definición 10 *Sea X un espacio métrico separable y $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ una coloración, decimos que c es una* coloración abierta *si para cualesquiera $a, b \in X$ si $c(a,b) = 0$ entonces existen abiertos ajenos U, V tales que $a \in U$, $b \in V$ y si $x \in U$, $y \in V$ entonces $c(x,y) = 0$.*

En [1] Shelah, Abraham y Rubin introdujeron el siguiente axioma, el cual es una versión de Ramsey para coloraciones abiertas.

Axioma 11 (SOCA) Semi Open Coloring Axiom

Si X es métrico separable no numerable y $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ es una coloración abierta, entonces existe $M \subseteq X$ monocromático no numerable.

Shelah, Abraham y Rubin probaron la independencia de SOCA con ZFC. Este axioma es muy interesante, pero existe un fortalecimiento mucho más poderoso y útil que este, el cual fue descubierto por Todorcevic (ver [10]).

Axioma 12 (OCA) Open Coloring Axiom

Si X es métrico separable y $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ es una coloración abierta, entonces se tiene la siguiente dicotomía,

1. *X tiene un 0-monocromático no numerable ó,*
2. *X es unión numerable de 1-monocromáticos, es decir $X = \bigcup_{n \in \omega} M_n$ donde cada M_n es 1-monocromático.*

[7] Aun más es cierto, si κ cumple con el teorema de Ramsey, entonces κ debe ser inaccesible, incluso debe tener una cantidad estacionaria de inaccesibles debajo de él. Los cardinales que cumplen el teorema de Ramsey se conocen como "Débilmente compactos" ver [4] para más información sobre ellos.

En este capítulo, probaremos que PFA implica OCA, el cual es un resultado muy interesante de Todorcevic. El siguiente lema es sencillo,

Lema 13 *Si* $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ *es una coloración abierta y* $A \subseteq X$ *es* 1*-monocromático, entonces la cerradura de* A *también es* 1*-monocromático.*

También necesitaremos el siguiente lema,

Lema 14 *Si* $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ *es una coloración abierta y* X *no es* $\sigma - 1$*-monocromático entonces existe* $Y \subseteq X$ *no vacío tal que ningún abierto de* Y *es* $\sigma - 1$*-monocromático.*

Prueba. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X, $\mathcal{W}$ la colección de los abiertos $\sigma - 1$-monocromáticos y definamos $Y = X - \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$. Como a X le estamos quitando una cantidad numerable de $\sigma - 1$-monocromáticos, concluimos que $Y \neq \emptyset$. Es claro que ningún abierto no vacío de Y es $\sigma - 1$-monocromático. ■

Sea X un espacio métrico separable y $c : X \longrightarrow 2$ una coloración abierta. Tomemos θ lo suficientemente grande, dado $M \preceq H_\theta$ numerable, llamamos $\mathcal{I}_M$ al σ-ideal generado por los 1-monocromático que pertenecen a M. Definimos el orden parcial $\mathbb{O}(X, c)$ cuyos elementos son $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tal que,

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_\in(\theta)$ y $X, c \in M_0$.
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow X$ y $f_p[\mathcal{M}_p]$ es 0-monocromático,
3. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$,
4. Si $i < j$ entonces $f_p(M_j) \notin H$ para todo $H \in \mathcal{I}_{M_i}$.

El orden en $\mathbb{O}(X, c)$ será simplemente la extensión entrada a entrada.

Proposición 15 *Supongamos que* X *no es* $\sigma - 1$*-monocromático. Sea* $M \precsim H_\kappa$ *con* κ *suficientemente grande y* $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in \mathbb{O}(X, c)$ *tal que* $M \cap H_\kappa \in \mathcal{M}_p$*, entonces* p *es* $(M, \mathbb{O}(X, c))$ *genérico.*

Prueba. Sea $D \in M$ abierto denso, veamos que $D \cap M$ es predenso bajo p. Así tomemos $q = (\mathcal{M}_q, f_q) \leq p$ y podemos suponer que $q \in D$. Sea $q' = q_M = (\mathcal{M}_q \cap M,\ f_q \cap M)$ y supongamos que $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{q'} \cup \{N_0, ..., N_m\}$ donde $N_0 = M \cap H_\kappa$. Obviamente, todo elemento de $\mathcal{M}_{q'}$ esta en M. Sea $\mathcal{B} \in M$ una base numerable de X y llamemos $x_i = f_q(N_i)$. Como $\{x_0, ..., x_m\}$ es 0-monocromático, podemos encontrar $U_0, ..., U_m \in \mathcal{B}$ ajenos tal que $x_i \in U_i$ y si $a \in U_i$, $b \in U_j$ entonces $c(a, b) = 0$ siempre que $i \neq j$.

Definamos L como el conjunto de todos los $r \in D$ tal que $q' \leq r$, $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_q \cup \{M_0, ..., M_m\}$ y $f_r(M_i) \in U_i$. Claramente $L \in M$ y $q \in L$ por lo que L es no numerable. Notemos que si $r \in L \cap M$ entonces $c(x_i, f_r(M_j)) = 0$ siempre que $i \neq j$, así que solo tenemos que preocuparnos por encontrar $r \in L \cap M$ tal que $c(x_i, f_r(x_i)) = 0$ para toda $i \leq m$. En aras de la claridad supondremos que $m = 2$, el caso general es análogo.

Sea T el árbol tal que $[T] = \{\langle y_0, y_1, y_2 \rangle \in X^3 \mid \exists r \in L(f_r(M_i) = y_i)\}$,[8] claramente $T \in M$ y $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle \in T$. Definamos S_2 como el conjunto de todos los $a \in suc_T(\langle x_0, x_1 \rangle)$ tal que si $a' \in suc_T(\langle x_0, x_1 \rangle)$ entonces $c(a, a') = 1$, el cual es un elemento de N_2 y es 1-monocromático. De esta manera, $x_2 \notin S_2$ (pues x_2 no esta en ningún 1-monocromático de N_2) por lo que hay x_2' tal que $\langle x_0, x_1, x_2' \rangle \in T$ y $c(x_2, x_2') = 0$. Así podemos concluir que hay $W_2, V_2 \subseteq U_2$ abiertos ajenos en $\mathcal{B}$ con $x_2 \in V_2$, $x_2' \in W_2$ y $c(a, b) = 0$ para todo $a \in V_2$ y $b \in W_2$.

Ahora definamos el árbol T_1 tal que $[T_1]$ es el conjunto de todos los $\langle y_0, y_1 \rangle \in T$ tal que $suc_T(\langle y_0, y_1 \rangle) \cap W_2 \neq \emptyset$. Sea S_1 el conjunto de los $a \in suc_{T_1}(\langle x_0 \rangle)$ tal que si $a' \in suc_{T_1}(\langle x_0 \rangle)$ entonces $c(a, a') = 1$. Claramente $S_1 \in N_1$ y es 1-monocromático, por lo que $x_1 \notin S_1$ y por ende hay $x_1' \in suc_{T_1}(\langle x_0 \rangle)$ tal que $c(x_1, x_1') = 0$. De esta manera, existen $W_1, V_1 \subseteq U_1$ abiertos ajenos en $\mathcal{B}$ con $x_1 \in V_1$, $x_1' \in W_1$ y $c(a, b) = 0$ para todo $a \in V_1$ y $b \in W_1$.

De igual manera, definamos $T_0 = \{y \mid suc_{T_1}(\langle y \rangle) \cap W_1 \neq \emptyset\}$ y sea S_0 el conjunto de los $a \in T_0$ tal que si $a' \in T_0$ entonces $c(a, a') = 1$. Claramente $S_0 \in N_0 = M$ y es 1-monocromático, por lo que $x_0 \notin S_0$ de manera que existe $x_0' \in T_0$ tal que $c(x_0, x_0') = 0$. De esta manera hay $W_0, V_0 \subseteq U_0$ abiertos ajenos en $\mathcal{B}$ con $x_0 \in V_0$, $x_0' \in W_1$ y $c(a, b) = 0$ para todo $a \in V_1$ y $b \in W_1$.

Así podemos concluir que $T \cap (W_0 \times W_1 \times W_2) \neq \emptyset$ y por elementaridad existe $\langle y_0, y_1, y_2 \rangle$ que esta tanto en $T \cap (W_0 \times W_1 \times W_2)$ como en M. Por la definición de T y usando elementaridad podemos encontrar $r \in L \cap M$ tal que $f_r(M_i) = y$, lo cual implica que r y q son compatibles. ■

Para probar que $\mathbb{O}(X, c)$ es propio, necesitamos el siguiente resultado,

Lema 16 *Supongamos que ningún abierto de X es $\sigma - 1$-monocromático, sea $M \precsim H_\lambda$ numerable (con $\lambda > \theta$ lo suficientemente grande) y $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in M$. Sea $M' = M \cap H_\theta$, entonces existe $a \in X - M$ tal que la pareja definida por $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', a)\})$ es una condición.*

Prueba. Supongamos que $\mathcal{M}_p = \{N_0, ..., N_m\}$ y $x_m = f_p(N_m)$. Encontremos $U_0, ..., U_m \in M$ abiertos ajenos tal que $x_i \in U_i$ y $c(y, w) = 0$ siempre que $y \in U_i$, $w \in U_j$ y $i \neq j$. Sea $H = \{y \in U_m \mid \forall z \in U_m (c(y, z) = 1)\}$ claramente $H \in N_m$

[8] Dado un árbol T, denotamos por $[T]$ al conjunto de sus ramas y si $t \in T$ entonces $suc_T(t) = \{a \mid t^\frown \langle a \rangle \in T\}$.

y es 1-monocromático, por lo que $x_m \notin H$, de manera que existe $z \in U_m$ tal que $c(x_m, z) = 0$ y así hay $V, W \subseteq U_m$ abiertos ajenos tal que $x_m \in V$, $z \in W$ y $c(d, e) = 0$ en caso de que $d \in V$ y $e \in W$. Como W no es $\sigma - 1$-monocromático entonces existe $a \in W$ que no pertenece a ningún 1-monocromático de M, por lo que $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', a)\})$ es una condición. ■

Y así podemos concluir,

Corolario 17 *Si ningún abierto de X es $\sigma-1$-monocromático entonces $\mathbb{O}(X, c)$ es propio.*

Finalmente, podemos probar el resultado de Todorcevic,

Teorema 18 (Todorcevic ver [10]) PFA *implica* OCA.

Prueba. Sea X métrico separable y $c : [X]^2 \longrightarrow 2$ un coloración abierta tal que X no es $\sigma - 1$-monocromático. Incluso, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ningún abierto de X es $\sigma - 1$-monocromático. De esta manera, $\mathbb{O}(X, c)$ es propio. Dado $\alpha \in \omega_1$ definamos D_α como los $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tal que existe $M \in \mathcal{M}_p$ tal que $\alpha \in M$, claramente D_α es denso por el lema anterior.

Usando PFA podemos encontrar $G \subseteq \mathbb{O}(X, c)$ un filtro que intersecta a D_α para cada $\alpha \in \omega_1$. Definamos $H = \bigcup_{(\mathcal{M}, f) \in G} Im(f)$; entonces H es un monocrómatico no numerable. ■

Para más información sobre OCA consultar [12].

4. P-ideal Dichotomy

El teorema de Ramsey falla cuando coloreamos "gráficas con aristas numerables". Dado κ un cardinal, tomemos $([\kappa]^{\omega}, \precsim)$ un buen orden y definimos la coloración $c : [\kappa]^{\omega} \longrightarrow 2$ donde $c(S) = 0$ si y solo si $S \precsim Z$ para todo $Z \subseteq S$. Es fácil ver que esta coloración no tiene monocromáticos infinitos. Sin embargo, así como fue con el Open Coloring Axiom, es posible tener una versión de Ramsey si nos restringimos a coloraciones con buenas propiedades combinatorias.

Definición 19 *Sea S un conjunto, decimos que $c : [S]^{\leq\omega} \longrightarrow 2$ es una* coloración P-ideal *si $c^{-1}(\{0\})$ forma un P-ideal*[9]*.*

Stevo Todorcevic enunció la P-ideal Dichotomy (ver [11]), la cual establece la misma dicotomía que se tenía en OCA pero para coloraciones P-ideales.

Axioma 20 *(PID) P*-ideal Dichotomy

Si S es un conjunto y $c : [S]^{\leq\omega} \longrightarrow 2$ es una coloración P-ideal, entonces sucede alguna de las siguientes,

1. *S tiene un subconjunto 0-monocromático no numerable o,*
2. *$S = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ donde cada M_n es 1-monocromático.*

Si evitamos el uso de coloraciones, podemos enunciar PID de la siguiente manera,

Axioma 21 *(PID) P*-ideal Dichotomy

Si S es un conjunto y $\mathcal{I} \subseteq [S]^{\leq\omega}$ es un P-ideal entonces se cumple la siguiente dicotomía,

1. *Existe $M \subseteq S$ no numerable tal que $[M]^{\leq\omega} \subseteq \mathcal{I}$ o,*
2. *$S = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ donde para cada M_n y se tiene que $[M_n]^{\omega} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.*

Nótese que si S es numerable, entonces 2 siempre sucede. Ahora veremos que PFA implica PID y para ello usaremos forcing con modelos como condiciones laterales. Sea S un conjunto no numerable y $\mathcal{I} \subseteq [S]^{\leq\omega}$ un P-ideal, tomemos θ suficientemente grande, y para cada $M \precsim H_\theta$ numerable, sea $A_M \in \mathcal{I}$ tal que $B \subseteq^* A_M$ para todo $B \in \mathcal{I} \cap M$. Definimos $\mathcal{I}^{\perp} = \{Z \subseteq S \mid \forall A \in S\, (A \cap Z =^* \emptyset)\}$ obviamente, $\mathcal{I}^{\perp} = \{Z \subseteq S \mid [Z]^{\omega} \cap \mathcal{I} = \emptyset\}$. Ahora definimos el orden parcial $\mathbb{D}(S, \mathcal{I})$ como el conjunto de las parejas $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tales que,

[9]Decimos que $\mathcal{I}$ es un *P-ideal* si para todo $\{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$ existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $A_n \subseteq^* B$ para toda $n \in \omega$.

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_{\in}(\theta)$,
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow S$,
3. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$,
4. Si $i < j$ y $B \in \mathcal{I}^{\perp} \cap M_i$ entonces $f_p(M_j) \notin B$.

Decimos que $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \leq q = (\mathcal{M}_q, f_q)$ si y solo si,

1. $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_p$ y $f_q \subseteq f_p$,
2. Si $M \in \mathcal{M}_q$ y $b \in (Im(f_p) - Im(f_q)) \cap M$ entonces $b \in A_M$.

De ahora en adelante, supongamos que S no cumple el segundo punto de la dicotomía de PID es decir, no es posible escribir a S como $S = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ donde $M_n \in \mathcal{I}^{\perp}$ para cada $n \in \omega$.

Proposición 22 *Si $M \precsim H_\kappa$ numerable (con $\kappa > \theta$ suficientemente grande), $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in \mathbb{D}(S, \mathcal{I})$ y $M \cap H_\theta \in \mathcal{M}_p$ entonces p es $(M, \mathbb{D}(S, \mathcal{I}))$-genérico.*

Prueba. Sea $D \in M$ abierto denso, queremos probar que $M \cap D$ es predenso bajo p. Sea $q = (\mathcal{M}_q, f_q) \leq p$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $q \in D$. Veremos que q es compatible con un elemento de $M \cap D$. Sea $q' = q_M = (\mathcal{M}_q \cap M, f_q \cap M)$ supongamos que $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{q'} \cup \{N_0, ..., N_m\}$ donde $N_0 = M \cap H_\theta$ y llamemos $x_i = f_r(N_i)$. Sea L el conjunto de los $r \in D$ tal que $q_M \leq r$ y $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{q'} \cup \{M_0, ..., M_m\}$. Naturalmente $L \in M$ y $q \in L$. Queremos encontrar $r \in L \cap M$ tal que r y q sean compatibles. Tomemos $r \in L \cap M$ notemos que $q \vee r = (\mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r, f_r \cup f_q)$ es una condición y $\mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r$ se obtiene al agregar los m modelos de $\mathcal{M}_r - \mathcal{M}_{q'}$ entre $M \cap H_\theta$ y el último modelo de $\mathcal{M}_{q'}$. Notemos que $q \vee r \leq r$; sin embargo, no necesariamente pasa que $q \vee r \leq q$, para esto necesitamos que $f_r(M_i) \in A_{N_j}$ para todos $i, j \leq n$. Veremos cómo encontrar un r con dicha propiedad. Para facilitar la exposición, supondremos que $m = 2$.

Sea T el árbol tal que $[T] = \{\langle y_0, y_1, y_2\rangle \mid \exists r \in L\, (f_r(M_i) = y_i)\}$, notemos que T es un elemento de M. Claramente $suc_T(\langle x_0, x_1\rangle) \in N_2$ y $x_2 \in N_2$, lo cual implica que $suc_T(\langle x_0, x_1\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}$ o equivalentemente, $suc_T(\langle x_0, x_1\rangle)$ tiene un subconjunto infinito que esta en $\mathcal{I}$. Definamos T_1 el árbol tal que $[T_1] = \left\{\langle y_0, y_1\rangle \in T \mid suc_T(\langle y_0, y_1\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}\right\}$ y observemos que $suc_{T_1}(\langle x_0\rangle) \in N_1$ y $x_1 \in suc_{T_1}(\langle x_0\rangle)$ de manera que $suc_{T_1}(\langle x_0\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}$. Definamos $T_2 = \left\{y \mid suc_{T_1}(\langle y\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}\right\}$ claramente $T_2 \in M$ y $x_0 \in T_2$, por lo que $T_2 \notin \mathcal{I}^{\perp}$.

Sea $S_2 \in [T_2]^{\omega} \cap \mathcal{I}$ tal que $S_2 \in M$, de esta forma $S_2 \subseteq^* A_{N_i}$ con $i \leq 2$, por lo que podemos encontrar $y_0 \in S_2 \cap A_{N_0} \cap A_{N_1} \cap A_{N_2}$. Como $suc_{T_1}(\langle y_0\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}$ entonces hay $S_1 \in [suc_{T_1}(\langle y_0\rangle)]^{\omega} \cap \mathcal{I}$ y así podemos encontrar $y_1 \in S_1 \cap A_{N_0} \cap A_{N_1} \cap A_{N_2}$. Como $suc_T(\langle y_0, y_1\rangle) \notin \mathcal{I}^{\perp}$ entonces hay $S_0 \in [suc_T(\langle y_0, y_1\rangle)]^{\omega} \cap \mathcal{I}$

y así existe $y_2 \in S_0 \cap A_{N_0} \cap A_{N_1} \cap A_{N_2}$. Como $\langle y_0, y_1, y_2 \rangle \in T$ entonces existe $r \in L \cap M$ tal que $f_r(M_i) = y$ y así r y q son compatibles. ∎

Para concluir que nuestro forcing es propio, necesitamos lo siguiente,

Lema 23 *Si* $M \precsim H_\kappa$ *y* $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in M$. *Sea* $M' = M \cap H_\theta$, *entonces existe* $a \in S - M$ *tal que* $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', a)\})$ *es condición.*

Prueba. Como S no se puede cubrir con una cantidad numerable de conjuntos en $\mathcal{I}^\perp$ se tiene el resultado. ∎

Y así evidentemente podemos concluir,

Corolario 24 $\mathbb{D}(S, \mathcal{I})$ *es propio.*

Finalmente podemos probar el resultado principal de este capítulo,

Teorema 25 (Todorcevic ver [11]) PFA *implica* PID.

Prueba. Sea S no numerable y $\mathcal{I}$ un P-ideal sobre S tal que no se cumple la segunda parte de la dicotomía de PID, así sabemos que $\mathbb{D}(S, \mathcal{I})$ es propio. Dado $\alpha \in \omega_1$, definamos D_α como el conjunto de los $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tal que hay $M \in \mathcal{M}_p$ y $\alpha \in M$. Claramente este conjunto es abierto denso.

Usando PFA, podemos encontrar $G \subseteq \mathbb{D}(S, \mathcal{I})$ un filtro que intersecte a todos los D_α con $\alpha \in \omega_1$. Sea $H = \bigcup_{(\mathcal{M}, f) \in G} Im(f)$ el cual es un subconjunto no numerable de S, veamos que $[H]^\omega \subseteq \mathcal{I}$. Sea $A \subseteq H$ numerable, entonces existe $(\mathcal{M}, f) \in G$ y $M \in \mathcal{M}$ tal que $A \subseteq M \cap S$, y así $A \subseteq^* A_M$, por lo que $A \in \mathcal{I}$. ∎

5. Tal vez no existen los S-espacios

Decimos que X es un *S-espacio*[10] si es hereditariamente separable pero no es Lindelöf. Asumiendo la existencia de un árbol de Suslin o $\mathfrak{b} = \omega_1$, es posible construir un S-espacio (ver [10]). Sin embargo, la consistencia de su no existencia era un problema más difícil. Al final, fue Todorcevic ([7]; ver también [10]) quién logró probar que PFA implica que no existen tales espacios. En este capítulo se expondrá esta prueba.

Dado un espacio topológico $X = (\omega_1, \tau)$ decimos que X es *abierto-izquierdo* si para cada $\alpha \in \omega_1$ existe un abierto U_α tal que $\alpha \in U_\alpha$ y si $\beta > \alpha$ entonces $\beta \notin U_\alpha$. Si X es abierto-izquierdo, usando regularidad, podemos encontrar para cada $\alpha \in \omega_1$ un abierto V_α de α tal que si $\beta > \alpha$ entonces $\beta \notin \overline{V}_\alpha$. Es claro que todo espacio abierto-izquierdo no es Lindelöf. Obsérvese que si $X = (\omega_1, \tau)$ es abierto-izquierdo y los V_α son como acabamos de describir, podemos considerar $X' = (\omega_1, \tau')$ la topología generada solo por los $\{V_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$, es claro que X' es abierto-izquierdo y tiene una base de abiertos numerables, por lo que es cero dimensional.

Lema 26 *Si existe un S-espacio, entonces existe un S-espacio abierto-izquierdo cero dimensional.*

Prueba. Sea X un S-espacio, como X no es Lindelöf, existe una cubierta abierta $\mathcal{S}$ que no tiene subcubiertas numerables. Recursivamente, para cada $\alpha \in \omega_1$ escojamos $a_\alpha \in X$ y $U_\alpha \in \mathcal{S}$ de manera que $a_\alpha \notin \bigcup_{\xi<\alpha} U_\xi$ pero $a_\alpha \in U_{\alpha+1}$. Esto es posible por que $\mathcal{S}$ no tiene subcubiertas numerables. Entonces $Y = \{a_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ es abierto izquierdo y por los comentarios en el párrafo anterior, se sigue el resultado. ■

Para probar que PFA implica que no existen los S-espacios, basta ver que prohibe la existencia de los S-espacios abiertos-izquierdos cero dimensionales. Fijemos un S-espacio $X = (\omega_1, \tau)$ y $\mathcal{B} = \{V_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ una colección de abiertos y cerrados tal que $\alpha \in V_\alpha$ y si $\beta > \alpha$ entonces $\beta \notin V_\alpha$. Dado $s \in [\omega_1]^{<\omega}$ definimos $Miss(s) = \{\alpha \mid s \cap V_\alpha = \emptyset\}$.

Definimos $\mathbb{D}(X)$ como el orden parcial cuyos elementos son parejas $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tal que,

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_\in(\theta)$ donde $X, \mathcal{B} \in M_0$,
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow X$ tal que si $\alpha, \beta \in Im(f_p)$ entonces $\alpha \notin V_\beta$ y $\beta \notin V_\alpha$ (noten que una de estas siempre pasa),
3. $Miss(Im(f_p))$ es no numerable,
4. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$.

[10] En este trabajo todos los espacios son regulares.

Comenzaremos a probar que nuestro forcing es propio, el resultado más importante para ello es el siguiente,

Proposición 27 *Si* $M \precsim H_\kappa$ *es numerable (con* $\kappa > \theta$ *suficientemente grande),* $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in \mathbb{D}(X)$ *y* $M \cap H_\theta \in \mathcal{M}_p$ *entonces* p *es* $(M, \mathbb{D}(X))$*-genérico.*

Prueba. Sea $D \in M$ abierto denso, veamos que $D \cap M$ es predenso bajo p. Sea $q = (\mathcal{M}_q, f_q) \leq p$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $q \in D$. Definamos $q' = q_M = (\mathcal{M}_q \cap M, f_q \cap M) \in M$ supongamos que $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{q'} \cup \{N_0, ..., N_m\}$ donde $N_0 = M \cap H_\theta$ y llamemos $x_i = f_q(N_i)$. Supondremos que $m = 2$ para que la escritura sea más clara.

Sea $L = \{r \in D \mid q_M \leq r \wedge \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{q'} \cup \{M_0, M_1, M_2\}\}$, si $r \in L$ entonces para que q y r sean compatibles, solo necesitamos que $f_r(M_i) \notin V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ para cada $i \leq 2$, pues en ese caso $q \vee r = (\mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r, f_q \cup f_r)$ será una extensión en común.

Definamos T el árbol tal que $[T] = \{\langle y_0, y_1, y_2\rangle \mid \exists r \in L\,(f_r(M_i) = y_i)\}$ y notemos que $T \in M$. Claramente $suc_T(\langle x_0, x_1\rangle) \in N_2$ y $x_2 \in suc_T(\langle x_0, x_1\rangle)$ de modo que $suc_T(\langle x_0, x_1\rangle)$ es no numerable. Llamemos T_1 al árbol tal que $[T_1] = \{\langle y_0, y_1\rangle \in T \mid |suc_T(\langle y_0, y_1\rangle)| = \omega_1\}$, claramente $suc_{T_1}(\langle x_0\rangle) \in N_1$ y $x_1 \in suc_{T_1}(\langle x_0\rangle)$ por lo que este es no numerable.

Ahora llamemos $T_2 = \{y \mid suc_{T_1}(\langle y\rangle) = \omega_1\}$ sabemos que $T_2 \in N_0$ y $x_0 \in T_2$ por lo que este es no numerable. Como $T_2 \in M$ y X es hereditariamente separable, entonces existe $Y_2 \in M$ numerable (por lo que $Y_2 \subseteq M$) que es denso en T_2. Notemos que $Y_2 \nsubseteq V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ (pues en caso contrario, como cada V_{x_i} es abierto y cerrado, entonces se tendría que $T_2 \subseteq \overline{Y}_2 \subseteq V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ lo cual es imposible, pues el primero es no numerable y el segundo es numerable). Así, podemos escoger $a \in Y_2 - V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ (y se tiene que $a \in M$).

Claramente $suc_{T_1}(\langle a_0\rangle) \in M$, por lo que existe $Y_1 \in M$ denso numerable en $suc_{T_1}(\langle a_0\rangle)$. Como $Y_1 \nsubseteq V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ podemos encontrar $a_1 \in Y_1 - V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$. Sabemos que $suc_T(\langle a_0, a_1\rangle) \in M$ por lo que hay $Y_0 \in M$ denso numerable en $suc_T(\langle a_0, a_1\rangle)$ y como $Y_0 \nsubseteq V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$ seleccionamos $a_2 \in Y_2 - V_{x_0} \cup V_{x_1} \cup V_{x_2}$. Como $\langle a_0, a_a, a_2\rangle \in T$ entonces hay $r \in M \cap L$ tal que $f_r(M_i) = a_i$ y claramente q y r son compatibles. ■

Ahora necesitamos el siguiente lema,

Lema 28 *Sea* $M \precsim H_\kappa$ *numerable y* $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in M$*. Si* $M' = M \cap H_\theta$*, entonces existe* $\alpha \in \omega_1 - M$ *tal que* $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', \alpha)\})$ *es condición.*

Prueba. Sea $s = Im(f_p)$ y como p es condición, sabemos que $Miss(s)$ es no numerable. Así basta encontrar $\alpha \in (\omega_1 - M) \cap Miss(s)$ tal que $Miss(s \cup \{\alpha\})$

sea no numerable (pues de esta manera, q será condición). Probaremos esto por contradicción, supongamos que para todo $\alpha \in (\omega_1 - M) \cap Miss\,(s)$ se tiene que $Miss\,(s \cup \{\alpha\})$ es numerable. Pero de esta manera, podemos recursivamente construir $A = \{a_\gamma \mid \gamma \in \omega_1\} \subseteq Miss\,(s) - M$ que sea homeomorfo a ω_1 (con la topología del orden), lo cual es una contradicción pues ω_1 no es separable. ■

Y así evidentemente podemos concluir,

Corolario 29 $\mathbb{D}\,(X)$ *es propio.*

Ya estamos listos para probar el teorema principal de la sección,

Teorema 30 (Todorcevic ver [7]) PFA *implica que no existen los S-espacios.*

Prueba. Supongamos lo contrario, de manera que existe $X = (\omega_1, \tau)$ un espacio abierto-izquierdo cero dimensional, por lo que $\mathbb{D}\,(X)$ es propio. Dado $\alpha \in \omega_1$ sea D_α el conjunto de las condiciones $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tales que existe $M \in \mathcal{M}_p$ y $\alpha \in M$. Es claro que este conjunto es denso.

Usando PFA podemos encontrar un filtro $G \subseteq \mathbb{D}\,(X)$ que intersecta a todos los D_α con $\alpha \in \omega_1$. Sea $Y = \bigcup_{(\mathcal{M},f)\in G} Im\,(f)$ entonces es claro que Y es un subconjunto discreto no numerable de X, lo cual es una contradicción pues se suponía que X era hereditariamente separable. ■

Decimos que X es un L-espacio si es hereditariamente Lindelöf pero no es separable, en cierta forma, podemos pensar que los L-espacios son "duales" a los S-espacios. De nuevo, es fácil construir L-espacios usando CH o un árbol de Suslin (ver [10]). Sin embargo, por mucho tiempo estuvo abierta la pregunta si era consistente que no existieran. Debido al teorema de Todorcevic sobre la consistencia de que no existieran los S-espacios, se esperaba que fuera consistente que no existieran los L-espacios. Sin embargo, Justin Moore sorprendió al mundo cuando logró construir un L-espacio sin ningún axioma adicional (ver [6]). Al final, (contrario a lo esperado por muchos) "el problema del S-espacio" y "el problema del L-espacio" resultaron no ser tan duales, siempre existen los L-espacios pero no necesariamente existen los S-espacios. Para aprender más sobre S-espacios y L-espacios consultar [10].

6. Familias MAD y Luzin

En este capítulo usaremos el Proper Forcing Axiom para probar un interesante teorema estructural sobre familias MAD[11] descubierto por Alan Dow (ver [2]). Antes de comenzar, necesitamos recordar la siguiente importante definición,

Definición 31 *Sea $\mathcal{A}$ una AD, decimos que $\mathcal{A}$ es una* familia de Luzin *si $\mathcal{A}$ puede escribirse como $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ de manera que para todo $n \in \omega$ y $\alpha < \omega_1$ se tiene que $\{\beta < \alpha \mid A_\beta \cap A_\alpha \subseteq n\} =^* \emptyset$.*

No es difícil construir familias de Luzin (ver [3]) en este capítulo probaremos el teorema de Alan Dow que establece que toda familia MAD contiene una familia de Luzin. En este capítulo, $\mathcal{A}$ siempre será una AD y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro.

Definición 32 *Decimos que $\mathcal{A}$ es ω-*hitting con respecto a $\mathcal{U}$ *si para cualesquiera $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap X_n| = \omega$ para cada $n \in \omega$.*

En particular, tenemos el siguiente resultado,

Lema 33 *Si $\mathcal{A}$ es MAD entonces y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro entonces $\mathcal{A}$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$.*

Prueba. Tomemos $\{X_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ y sin pérdida de generalidad, supongamos que forman una cadena decreciente. Séa $Y \subseteq^* X_n$ para cada $n \in \omega$, como $\mathcal{A}$ es MAD, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap Y$ es infinito, de modo que A intersecta a todos los X_n. ∎

Dada $\mathcal{A}$ MAD y $\mathcal{U}$ ultrafiltro tomemos θ lo suficientemente grande y dado $M \precsim H_\theta$ numerable, definimos $\mathcal{I}_{\mathcal{AU}}(M)$ como el conjunto de todos los $A \in \mathcal{A}$ tales que existe $B \in M \cap \mathcal{U}$ tal que $A \cap B =^* \emptyset$. Definimos el orden parcial $\mathbb{L}(\mathcal{A},\mathcal{U})$ como el conjunto de las tercias $p = (\mathcal{M}_p, f_p, n_p)$ tales que,

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_\in(\theta)$ y $\mathcal{A},\mathcal{U} \in M_0$,
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow \mathcal{A}$ y $n_p \in \omega$,
3. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$,
4. Si $i < j$ entonces $f_p(M_j) \notin \mathcal{I}_{\mathcal{AU}}(M_i)$.

Decimos que $p = (\mathcal{M}_p, f_p, n_p) \leq q = (\mathcal{M}_q, f_q, n_q)$ si y solo si,

1. $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_p$, $f_q \subseteq f_p$ y $n_q \leq n_p$,

[11] Decimos que $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es AD si todos sus elementos son casi ajenos. Una familia MAD es una AD maximal.

2. Si $M \in \mathcal{M}_q$, $A \in Im\,(f_q) - M$, y $B \in M \cap (Im\,(f_p) - Im\,(f_q))$ entonces $A \cap B \nsubseteq n_q$.

Comencemos a probar que $\mathbb{L}\,(\mathcal{A}{,}\mathcal{U})$ es propio. Dada $\mathcal{B}$ una familia casi ajena y $m \in \omega$, llamamos $\mathcal{B}_m = \{B \in \mathcal{B} \,| m \in B\}$. Notemos que aunque $\mathcal{B}$ sea ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$, no necesariamente $\mathcal{B}_m$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$, sin embargo, el siguiente lema muestra que esto sí pasa para una cantidad grande de $m \in \omega$.

Lema 34 *Si $\mathcal{B}$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$ entonces el conjunto $\{m \in \omega \mid \mathcal{B}_m$ es ω-hitting con $\mathcal{U}\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$.*

Prueba. Supongamos lo contrario, de modo que el conjunto X de los $m \in \omega$ tal que $\mathcal{B}_m$ no es ω-hitting con $\mathcal{U}$ es un elemento de $\mathcal{U}$. Para cada $m \in X$ existe $\{W_i^m \mid i \in \omega\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que ningún elemento de $\mathcal{B}_m$ intersecta infinitamente a todos los W_i^m. Sin embargo, como $\mathcal{B}$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$, entonces existe $A \in \mathcal{B}$ que intersecta infinitamente a todos los $\{W_i^m \mid i, m \in \omega\} \cup \{X\}$. De esta manera, si $m \in A \cap X$ entonces $A \in \mathcal{B}_m$ e interecta infinitamente a todos los W_i^m, lo cual es una contradicción. ∎

Ahora veremos el resultado clave para probar que el forcing es propio.

Proposición 35 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es MAD y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Si $M \precsim H_\kappa$ es numerable (con $\kappa > \theta$ suficientemente grande), $p = (\mathcal{M}_p, f_p, n_p) \in \mathbb{L}\,(\mathcal{A}{,}\mathcal{U})$ y $M \cap H_\theta \in \mathcal{M}_p$ entonces p es $(M, \mathbb{L}\,(\mathcal{A}{,}\mathcal{U}))$-genérico.*

Prueba. Sea $D \in M$ abierto denso, tenemos que probar que $D \cap M$ es predenso bajo p. Así tomemos $q = (\mathcal{M}_q, f_q, n) \leq p$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $q \in D$. Llamemos $q' = (\mathcal{M}_q \cap M, f_q \cap M, n)$ el cual es un elemento de M. Supongamos que $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{q'} \cup \{N_0, ..., N_m\}$ donde $N_0 = M \cap H_\theta$, llamemos $A_i = f_q\,(N_i)$. Sea $L = \{r \in D \mid r \leq q' \wedge \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{q'} \cup \{M_0, ..., M_m\} \wedge n_r = n\}$ el cual es un elemento de M. Dado $r \in L \cap M$, llamemos $q \vee r$ a la tercia $(\mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r, f_r \cup f_q, n)$; es claro que es una condición y además extiende a r. Sin embargo, es posible que no extienda a q, para lograr esto, tenemos que garantizar que $f_r\,(M_i) \cap A_j \nsubseteq n$ para todos $i, j \leq m$. Con afán de que la exposición sea más clara, supondremos que $m = 2$.

Sea $T \in M$ el árbol tal que $[T] = \{\langle B_0, B_1, B_2\rangle \mid \exists r \in L\,(f_r\,(M_i) = B_i)\}$ claramente $suc_T\,(\langle A_0, A_1\rangle)$ está en N_1 y tiene a A_2 como elemento. Afirmamos que $suc_T\,(\langle A_0, A_1\rangle)$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$. Por elementaridad, basta probar que si $\{X_n \mid n \in \omega\} \in N_2$ es un subconjunto de $\mathcal{U}$, entonces existe un elemento de $suc_T\,(\langle A_0, A_1\rangle)$ que intersecta infinitamente a todos los X_n. Como cada $X_n \in N_2 \cap \mathcal{U}$ entonces $X_n \cap A_2$ es infinito.

Sea $T_1 \in M$ el árbol tal que $[T_1]$ son las parejas $\langle B_0, B_1\rangle \in T$ tales que $suc_T\,(\langle B_0, B_1\rangle)$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$. Sabemos que $suc_{T_1}\,(\langle A_0\rangle) \in N_1$

y por el mismo argumento que antes concluimos que $suc_{T_1}(\langle A_0 \rangle)$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$.

Finalmente, sea $\mathcal{B}$ el conjunto de los B tal que $suc_{T_1}(\langle B \rangle)$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$, claramente $\mathcal{B}$ es un elemento de M y por el mismo argumento que antes, se sigue que es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{B}$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$ entonces sabemos que $\{m \in \omega \mid \mathcal{B}_m$ es ω-hitting con $\mathcal{U}\}$ pertenece a $\mathcal{U}$. Como este conjunto esta en M, entonces podemos encontrar un $m_0 > n$ tal que $m_0 \in A_0$ y $\mathcal{B}_{m_0}$ es ω-hitting con $\mathcal{U}$. De nuevo, sabemos que el conjunto $\{m \in \omega \mid \mathcal{B}_{m_0 m}$ es ω-hitting con $\mathcal{U}\}$ es un elemento de $\mathcal{U}$, por lo que hay $m_1 \in A_1$ tal que $m_1 > n$ y $\mathcal{B}_{m_0 m_1}$ es ω-hitting con $\mathcal{U}$. Por el mismo argumento, hay $m_2 \in A_2$ tal que $m_2 > n$ y $\mathcal{B}_{m_0 m_1 m_2}$ es ω-hitting con $\mathcal{U}$. Sea $B_0 \in \mathcal{B}_{m_0 m_1 m_2}$ entonces $m_0, m_1, m_2 \in B_0$ por lo que $A_i \cap B_0 \nsubseteq n$ para cada $i < 3$.

Sabemos que $suc_{T_1}(B_0)$ es ω-hitting con respecto a $\mathcal{U}$ y repitiendo el proceso anterior otras dos veces, obtenemos $\langle B_0, B_1, B_2 \rangle \in T$ tal que $A_i \cap B_j \nsubseteq n$ para cada $i, j < 3$. Por la definición de T y elementaridad, podemos encontrar $r \in L$ tal que $f_r(M_i) = B_i$ y así q y r son compatibles. ■

El siguiente lema es claro,

Lema 36 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro. Sea $M \precsim H_\kappa$ y $p = (\mathcal{M}_p, f_p, n_p) \in M$. Si $M' = M \cap H_\theta$, entonces existe $A \in \mathcal{A} - M$ tal que $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', A)\})$ es condición.*

Evidentemente podemos concluir,

Corolario 37 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es MAD y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $\mathbb{L}(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ es propio.*

Ya podemos probar el teorema de Alan Dow,

Teorema 38 (Dow ver [2]) PFA *implica que toda familia MAD contiene una familia de Luzin.*

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ una familia MAD y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, sabemos que $\mathbb{L}(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ es propio. Dado $\alpha \in \omega_1$ llamemos D_α al conjunto de las condiciones $p = (\mathcal{M}_p, f_p, n_p)$ tales que existe $M \in \mathcal{M}_p$ tal que $\alpha \in M$, claramente este conjunto es abierto denso.

Usando PFA, invoquemos un filtro $G \subseteq \mathbb{L}(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ que intersecte a todos los D_α con $\alpha \in \omega_1$. Sean $\mathcal{M} = \langle M_\alpha \mid \alpha \in \omega_1 \rangle$ y $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$ la $\in$-cadena y la función genérica obtenidas de G. Definamos $\mathcal{B} = \{B_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ donde $B_\alpha = F(M_\alpha)$. Es claro que $\mathcal{B}$ es una familia de Luzin. ■

7. Los cinco órdenes cofinales

Es muy importante tratar de clasificar las distintas estructuras matemáticas salvo isomorfismo, resultados exitosos en este aspecto son la clasificación de todos los campos finitos, la clasificación de todos los espacios vectoriales sobre un campo dado y la clasificación de los órdenes lineales densos numerables. Sin embargo, es muy común encontrarse que la clasificación bajo isomorfismo de cierta clase de estructuras sea imposible, pues pueden existir una gran cantidad de estructuras muy distintas entre sí. Es en estos casos que se intenta dar una clasificación usando una relación menos estricta que la de isomorfismo.

Definición 39 *Decimos que un orden parcial* $\mathbb{P}$ es dirigido *si cualesquiera dos elementos tienen una cota superior en común.*

El clasificar salvo isomorfismo a los órdenes parciales dirigidos de tamaño a lo más ω_1 es una tarea prácticamente imposible; sin embargo, hay esperanza de lograrlo con una relación menos estricta, *la equivalencia de Tukey.*

Definición 40 *Sean* $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ *órdenes parciales dirigidos, decimos que* $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un* morfismo de Tukey *si para todo* $A \subseteq \mathbb{Q}$ *acotado, se tiene que* $f^{-1}(A)$ *es acotado. Decimos que* $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ *es un* morfismo convergente *si* $g[C] \subseteq \mathbb{P}$ *es cofinal para todo* $C \subseteq \mathbb{Q}$ *cofinal.*

Dado $p \in \mathbb{P}$ denotaremos por $p_{\leq} = \{a \in \mathbb{P} \mid a \leq p\}$ y si $A \subseteq \mathbb{P}$ escribiremos $A \leq p$ en caso de que $A \subseteq p_{\leq}$. La relación entre las dos nociones previas esta explicada en el siguiente lema,

Lema 41 *Sean* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *dos órdenes dirigidos, entonces son equivalentes,*

1. *Existe* $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *morfismo de Tukey,*
2. *Existe* $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ *morfismo convergente.*

Prueba. Supongamos que $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es morfismo de Tukey, entonces para cada $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f^{-1}(q_{\leq})$ es acotado, por lo que podemos definir $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ tal que $f^{-1}(q_{\leq}) \leq g(q)$ (de manera que si $f(p) \leq q$ entonces $p \leq g(q)$) es fácil ver que g es un morfismo convergente. Por otro lado, si $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ es un morfismo convergente entonces para cada $p \in \mathbb{P}$ el conjunto $g^{-1}(\{a \in \mathbb{P} \mid p \nleq a\})$ no es cofinal, por lo que podemos definir $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ de manera que $f(p)$ no es menor que alguien de $g^{-1}(\{a \in \mathbb{P} \mid p \nleq a\})$, esto implica que si $f(p) \leq q$ entonces $p \leq g(q)$, es fácil ver que f es de Tukey. ■

En caso de que haya $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ un morfismo de Tukey, diremos que $\mathbb{P}$ *es Tukey menor que* $\mathbb{Q}$ y lo denotaremos por $\mathbb{P} \leq_T \mathbb{Q}$. Diremos que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son *Tukey equivalentes* si $\mathbb{P} \leq_T \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \leq_T \mathbb{P}$ y lo denotaremos por $\mathbb{P} =_T \mathbb{Q}$. Es fácil ver que si $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ es cofinal, entonces $\mathbb{Q} =_T \mathbb{P}$. Tukey probó que dos órdenes dirigidos $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son Tukey equivalentes si y solo si existe un orden dirigido $\mathbb{D}$ tal que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son isomorfos a conjuntos cofinales de $\mathbb{D}$ (ver [9]) la prueba es fácil, pero como no necesitaremos este resultado, no lo probaremos.

Nuestro objetivo es dar una clasificación salvo equivalencia de Tukey de los órdenes dirigidos de tamaño a lo más ω_1. Entre este tipo de órdenes, hay cinco que resaltan, los cuales son $1, \omega, \omega_1, \omega \times \omega_1$ y $[\omega_1]^{<\omega}$ es fácil ver que estos órdenes no son Tukey equivalentes y que guardan la siguiente relación (donde $\omega \times \omega_1$ tiene el orden de entrada por entrada).

$$\begin{tikzcd} & \omega \arrow[dr] & & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \omega \times \omega_1 \arrow[r] & [\omega_1]^{<\omega} \\ & \omega_1 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Como veremos con los siguientes lemas, estos órdenes tienen un papel clave entre los órdenes dirigidos de tamaño a lo más ω_1.

Lema 42 $[\omega_1]^{<\omega}$ *es el Tukey máximo para los órdenes de tamaño a lo más* ω_1.

Prueba. Sea $\mathbb{P}$ un orden dirigido, dado $s \in [\mathbb{P}]^{<\omega}$, denotaremos por $\vee s$ a una cota superior de s. Supongamos que $\mathbb{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ definimos $g : [\omega_1]^{<\omega} \longrightarrow \mathbb{P}$ donde $g(t) = \vee \{p_\alpha \mid \alpha \in t\}$ es claro que es un morfismo convergente. ■

En cuanto al producto tenemos el siguiente resultado,

Lema 43 *Si* $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{S}$ *son órdenes dirigidos y* $\mathbb{Q}, \mathbb{S} \leq_T \mathbb{P}$ *entonces* $\mathbb{Q} \times \mathbb{S} \leq_T \mathbb{P}$.

Prueba. Sean $g_1 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $g_2 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{S}$ morfismos convergentes, afirmamos que $g : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{S}$ dado por $g(p) = (g_1(p), g_2(p))$ es un morfismo convergente. Para ver esto, sea $C \subseteq \mathbb{P}$ cofinal, veremos que su imagen bajo g es cofinal. Sea $(q, s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{S}$ y definamos $C' = \{p \in C \mid q \leq g_1(p)\}$ entonces es cofinal, por lo que su imagen bajo g_2 es cofinal y de aquí se sigue el resultado. ■

Decimos que $B \subseteq \mathbb{P}$ es ω-acotado si todo subconjunto numerable de B es acotado en $\mathbb{P}$. Se tiene la siguiente caracterización de algunos de los órdenes mencionados previamente,

Lema 44 *Sea* $\mathbb{P}$ *un orden dirigido de tamaño a lo más* ω_1 *entonces,*

1. $\mathbb{P} =_T 1$ *si y solo si* $\mathbb{P}$ *tiene máximo,*

2. $\mathbb{P} =_T \omega$ *si y solo si* $\mathbb{P}$ *tiene un subconjunto cofinal numerable,*

3. $\mathbb{P} =_T \omega_1$ *si y solo si* $\mathbb{P}$ *es* ω*-acotado,*

4. $\mathbb{P} \leq_T \omega \times \omega_1$ *si y solo si* $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \omega} B_n$ *donde cada* B_n *es* ω*-acotado,*

5. $\mathbb{P} =_T [\omega_1]^{<\omega}$ *si y solo si existe* $D \subseteq \mathbb{P}$ *cofinal no numerable tal que todo subconjunto infinito de* D *es no acotado.*

La gran pregunta, es si existen órdenes dirigidos (de tamaño a lo más ω_1) que no sean Tukey equivalentes a $1, \omega, \omega_1, \omega \times \omega_1$ o $[\omega_1]^{<\omega}$. En [9] Todorcevic probó que existen $2^{\mathfrak{c}}$ órdenes dirigidos no Tukey equivalentes de tamaño continuo, por lo que bajo CH existe una gran cantidad de órdenes no equivalentes a estos. Sin embargo, como frecuentemente sucede, mientras que la Hipótesis del Continuo solo crea caos, PFA brinda orden y armonía. Todorcevic probó que bajo el Proper Forcing Axiom, solo existen estos cinco, veremos esta prueba a continuación.

Proposición 45 *Si* $\mathbb{P}$ *es un orden dirigido de tamaño* ω_1 *y no es Tukey equivalente a ninguno de los 5 órdenes anteriores, entonces* $\omega \times \omega_1 <_T \mathbb{P} <_T [\omega_1]^{<\omega}$.

Prueba. Podemos concluir que $\mathbb{P}$ no tiene máximo, todo subconjunto cofinal de $\mathbb{P}$ es no numerable, pero $\mathbb{P}$ tiene subconjuntos numerables no acotados. Ahora veamos que $\omega_1 \leq_T \mathbb{P}$, solo tomemos cualquier biyección $g : \mathbb{P} \longrightarrow \omega_1$ entonces por la hipótesis sobre $\mathbb{P}$ se tiene que g será un morfismo convergente. Así solo falta probar que $\omega \leq_T \mathbb{P}$, y para esto tomemos $A = \{p_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}$ un conjunto no acotado y definamos $g : \mathbb{P} \longrightarrow \omega$ donde $a_{g(p)} \nleq p$, es claro que este es un morfismo convergente. ■

Queremos probar que el Proper Forcing Axiom implica que todo orden dirigido de tamaño a lo más ω_1 es alguno de estos cinco. En este momento es claro lo que debemos hacer, para cada $\mathbb{P}$ dirigido tal que $\omega \times \omega_1 <_T \mathbb{P}$ (lo cual implica que $\mathbb{P}$ no es unión numerable de conjuntos ω-acotado) tenemos que diseñar un forcing propio que le agregue a $\mathbb{P}$ un subconjunto cofinal no numerable tal que todo subconjunto infinito de él sea no acotado.

De ahora en adelante, fijemos un orden $(\mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}})$ dirigido de tamaño ω_1 tal que $\omega \times \omega_1 <_T \mathbb{P}$. Tomemos θ lo suficientemente grande y dado $M \precsim H_\theta$ numerable, definimos $\mathcal{I}(M) \subseteq M$ como la colección de todos los subconjuntos ω-acotado de $\mathbb{P}$ que están en M. Definimos $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ como el conjunto de los pares $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tales que,

1. $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\} \in Col_{\in}(\theta)$ y $\mathbb{P} \in M_0$,
2. $f_p : \mathcal{M}_p \longrightarrow \mathbb{P}$,
3. $f_p(M_i) \notin M_i$ y si $i < n$ entonces $f_p(M_i) \in M_{i+1}$,
4. Si $i < j$ entonces $f_p(M_j) \notin Y$ para todo $Y \in \mathcal{I}(M_i)$.

Decimos que $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \leq q = (\mathcal{M}_q, f_q)$ siempre que,

1. $\mathcal{M}_q \subseteq \mathcal{M}_p$, $f_q \subseteq f_p$,

2. Si $a \in Im\,(f_p) - Im\,(f_q)$ y $b \in Im\,(f_q)$ entonces $a \not\leq_{\mathbb{P}} b$.

Notemos que si $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ es una condición $\mathcal{M}_p = \{M_0, ..., M_n\}$, $a \in M_i \cap \mathbb{P}$, $b \in M_j \cap \mathbb{P}$ y $j < i$, entonces $a \not\leq_{\mathbb{P}} b$ esto es por que $b_{\leq} \in M_j$ y evidentemente, $b_{\leq}$ es ω-acotado. Como siempre, trataremos de ver que este forcing es propio,

Proposición 46 *Si $M \precsim H_\kappa$ es numerable (con $\kappa > \theta$ suficientemente grande), $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in \mathbb{T}(\mathbb{P})$ y $M \cap H_\theta \in \mathcal{M}_p$ entonces p es $(M, \mathbb{T}(\mathbb{P}))$-genérico.*

Prueba. Sea $D \in M$ un conjunto abierto denso, veamos que $D \cap M$ es predenso bajo p, y para esto tomemos $q \leq p$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $q \in D$. Probaremos que q es compatible con un elemento de $D \cap M$. Sea $q' = q_M = (\mathcal{M}_q \cap M, f_q \cap M)$ y supongamos que $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_{q'} \cup \{N_0, ..., N_m\}$ donde $N_0 = M \cap H_\theta$. Llamemos $x_i = f_q\,(N_i)$ y sea L el conjunto de los $r \in D$ tales que $r \leq q'$ y $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{q'} \cup \{M_0, ..., M_m\}$, el cual es un elemento de N_0. Tomemos $r \in L \cap M$, notemos que $q \vee r = (\mathcal{M}_q \cup \mathcal{M}_r, f_q \cup f_r)$ es una condición y además $q \vee r \leq r$ sin embargo, no necesariamente extiende a q, para esto necesitamos que $f_r\,(M_i) \not\leq_{\mathbb{P}} x_j$ para cualesquiera $i, j \leq m$. De nuevo para simplificar la exposición, supondremos que $m = 2$.

Sea T el árbol tal que $[T] = \{\langle y_0, y_1, y_2\rangle \mid \exists r \in D\,(f_r\,(M_i) = y_i)\}$ el cual es un elemento de N_0. Obviamente, $\langle x_0, x_1, x_2\rangle \in [T]$, además $suc_T\,(\langle x_0, x_1\rangle) \in N_2$ y $x_2 \in suc_T\,(\langle x_0, x_1\rangle)$ por lo que $suc_T\,(\langle x_0, x_1\rangle)$ no es ω-acotado. Ahora definamos el árbol T_1 tal que $[T_1] = \{\langle y_0, y_1\rangle \mid suc_T\,(\langle y_0, y_1\rangle)$ no es $\omega - acotado\}$ que pertenece a N_0. Obviamente $suc_{T_1}\,(\langle x_0\rangle) \in N_1$ y $x_1 \in suc_{T_1}\,(\langle x_0\rangle)$ por lo que $suc_{T_1}\,(\langle x_0\rangle)$ no es ω-acotado. Finalmente, definimos T_2 como el conjunto de los y_0 tal que $suc_{T_1}\,(\langle y_0\rangle)$ no es ω-acotado, sabemos que $T_2 \in N_0$ y que $x_0 \in T_2$ de manera que T_2 no es ω-acotado.

Como $T_2 \in M$ y no es ω-acotado, entonces existe $A_0 \in M$ numerable (y por lo tanto $A_0 \subseteq M$) de manera que $A_0 \subseteq T_2$ y A_0 es no acotado en $\mathbb{P}$ así, en particular (dado que $\mathbb{P}$ es dirigido) podemos encontrar $y_0 \in A$ tal que $y_0 \not\leq_{\mathbb{P}} x_0, x_1, x_2$. Como $y_0 \in T_2$ entonces $suc_{T_1}\,(\langle y_0\rangle) \in M$ no es ω-acotado por lo que podemos encontrar $A_1 \in M$ numerable tal que $A \subseteq suc_{T_1}\,(\langle y_0\rangle)$ y es no acotado, de manera que existe $y_1 \in A$ tal que $y_1 \not\leq_{\mathbb{P}} x_0, x_1, x_2$. Por último, como $y_1 \in suc_{T_1}\,(\langle y_0\rangle)$ entonces $suc_T\,(\langle y_0, y_1\rangle) \in M$ no es ω-acotado por lo que (haciendo lo mismo) podemos encontrar $y_2 \in suc_T\,(\langle y_0, y_1\rangle)$ tal que $y_1 \not\leq_{\mathbb{P}} x_0, x_1, x_2$. Como $\langle y_0, y_1, y_2\rangle \in L$ entonces (por elementaridad) podemos encontrar $r \in L$ tal que $f_r\,(M_i) = y_i$ de manera que p y q son compatibles. ■

Para terminar de probar que $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ es propio, necesitamos el siguiente lema que es trivial,

Lema 47 *Sea* $M \precsim H_\kappa$ *y* $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in M$. *Si* $M' = M \cap H_\theta$, *entonces existe* $a \in \mathbb{P} - M$ *tal que* $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', a)\})$ *es condición.*

Evidentemente podemos concluir,

Corolario 48 $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ *es propio.*

Ya podemos probar el teorema principal del capítulo,

Teorema 49 (Todorcevic ver [9]) PFA *implica que todo orden dirigido de tamaño a lo más* ω_1 *es Tukey equivalente a* $1, \omega, \omega_1, \omega \times \omega_1$ *o* $[\omega_1]^{<\omega}$.

Prueba. Sea $\mathbb{P}$ un orden dirigido de tamaño a lo más ω_1 tal que $\omega \times \omega_1 <_T \mathbb{P}$, veremos que $\mathbb{P}$ es Tukey equivalente a $[\omega_1]^{<\omega}$. Ya sabemos que $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ es propio, sea $\dot{A}$ el nombre para el conjunto $\bigcup_{(\mathcal{M},f)\in\dot{G}} Im(f)$ donde $\dot{G}$ es el nombre del filtro genérico. Dado $b \in \mathbb{P}$ definimos D_b como el conjunto de los $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ tales que b es menor que un elemento $Im(f_p)$. Veamos que D_b es denso, sea $p = (\mathcal{M}_p, f_p)$ y tomemos $M \precsim H_\kappa$ (con κ lo suficientemente grande) tal que p, $b \in M$. Sea $M' = M \cap H_\theta$ y llamemos $C = \{a \in \mathbb{P} \mid b <_{\mathbb{P}} a\}$ claramente C es cofinal, por lo que no es unión numerable de conjuntos ω-acotados (pues de no ser así C sería Tukey equivalente a $\omega \times \omega_1$ pero $C =_T \mathbb{P}$). Así podemos encontrar $a \in C$ tal que $q = (\mathcal{M}_p \cup \{M'\}, f_p \cup \{(M', a)\})$ es una condición por debajo de q. Más aún, notemos que si $p = (\mathcal{M}_p, f_p) \in D_b$ entonces $p \Vdash$ "$\dot{A} \cap b_{\leq} \subseteq Im(f_p)$".

Usando PFA podemos encontrar un filtro $G \subseteq \mathbb{T}(\mathbb{P})$ que intersecta a todos los D_a con $a \in \mathbb{P}$ entonces es claro que $\dot{A}[G]$ es un subconjunto no numerable cofinal de $\mathbb{P}$ tal que todos sus subconjuntos infinitos son no acotados, de manera que $\mathbb{P}$ es Tukey equivalente a $[\omega_1]^{<\omega}$. ■

Referencias

[1] Uri Abraham, Matatyahu Rubin, and Saharon Shelah. On the consistency of some partition theorems for continuous colorings, and the structure of $\aleph_1$-dense real order types. *Ann. Pure Appl. Logic*, 29(2):123–206, 1985.

[2] Alan Dow. Sequential order under PFA. *Canad. Math. Bull.*, 54(2):270–276, 2011.

[3] Michael Hrušák. Almost disjoint families and topology. *Por aparecer en Recent Progress in Topology III 2013.*

[4] Akihiro Kanamori. *The higher infinite*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009. Large cardinals in set theory from their beginnings, Paperback reprint of the 2003 edition.

[5] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 34 of *Studies in Logic (London)*. College Publications, London, 2011.

[6] Justin Tatch Moore. A solution to the L space problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(3):717–736 (electronic), 2006.

[7] Stevo Todorčević. Forcing positive partition relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(2):703–720, 1983.

[8] Stevo Todorčević. A note on the proper forcing axiom. In *Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983)*, volume 31 of *Contemp. Math.*, pages 209–218. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[9] Stevo Todorčević. Directed sets and cofinal types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 290(2):711–723, 1985.

[10] Stevo Todorčević. *Partition problems in topology*, volume 84 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[11] Stevo Todorčević. A dichotomy for P-ideals of countable sets. *Fund. Math.*, 166(3):251–267, 2000.

[12] S. Todorcevich and I. Farah. *Some applications of the method of forcing*. Yenisei Series in Pure and Applied Mathematics. Yenisei, Moscow, 1995.